MASTER 2 Sciences, Technologies, Santé

Mention Mathématiques

Parcours Recherche

En co-accréditation avec l'Université d'Artois et

avec l'Université Polytechnique Hauts-de-France

Année universitaire 2022 – 2023

Laboratoire Paul Painlevé - Université de Lille (CNRS UMR 8524)
Laboratoire de Mathématiques de Lens - Université d'Artois (UR 2462)
Laboratoire de Matériaux Céramiques et de Mathématiques CERAMATHS – Département DMTHS - UPHF

https://sciences-technologies.univ-lille.fr/les-departements-de-formation/mathematiques/

RESPONSABLE LILLE	Mylène MAIDA mylene.maida@univ-lille.fr Université de Lille Faculté des Sciences et Technologies Département de Mathématiques 59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX
SECRETARIAT	Céline SAADE math-masters2@univ-lille.fr Tel. 03.20.43.42.33

RESPONSABLE VALENCIENNES	Serge NICAISE Université Polytechnique Hauts-de-France CERAMATHS/DMATHS - Abel de Pujol 2 Le Mont Houy 59313 VALENCIENNES Cedex 9
SECRETARIAT	Fatiha Meziane fatiha.meziane@uphf.fr Tel. 03.27.51.19.01

RESPONSABLE LENS-ARTOIS	Martintxo SARALEGI-ARANGUREN saralegi@euler.univ-artois.fr Tel. 03.21.79.17.20 Université d'Artois Faculté des Sciences Jean Perrin Rue J. Souvraz, SP 18 F-62307 LENS CEDEX

OBJECTIFS

Le **Master Mathématiques** offre une formation approfondie en mathématiques et fournit un bagage solide et de haut niveau en mathématiques. Le parcours **Recherche** permet l'acquisition de connaissances approfondies dans des thématiques de recherche contemporaines en mathématiques. Les choix des cours proposés permettent aux étudiants de bénéficier d'un premier contact avec des problématiques de recherche en mathématiques, allant des mathématiques pures jusqu'aux mathématiques appliquées.

La formation est centrée sur les cinq domaines des mathématiques pures et appliquées représentés dans les laboratoires :

- Analyse
- Analyse numérique et équations aux dérivées partielles
- Arithmétique et géométrie algébrique
- Géométrie et topologie
- Probabilités et statistiques

Le parcours recherche fait partie du programme gradué "Information and Knowledge Society" (GP-IKS) : http://www.isite-ulne.fr/index.php/fr/programme-gradue-information-and-knowledge-society-etudiant/

DEBOUCHES

Le parcours **Recherche** s'inscrit principalement dans le monde de la recherche et de l'enseignement. Il prépare aux fonctions d'enseignant et de chercheur. Par sa poursuite en doctorat, le Master permet d'envisager une carrière d'enseignant-chercheur en Mathématiques dans l'enseignement supérieur, ou de chercheur dans un laboratoire de recherche public (CNRS, INRIA, etc) ou privé et, plus généralement, dans des sociétés de services ayant besoin de mathématiciens.

Pour préparer une thèse de doctorat :

Un nombre limité de contrats doctoraux de 3 ans peuvent être établis. Leurs sources de financement sont : Allocations de recherche du Ministère, bourse du LABEX CEMPI, bourses CNRS, bourses de la Région, bourses CIFRE, bourses financées par des programmes institutionnels. Une rémunération complémentaire pour service d'enseignement peut également être envisagée.

Candidature : Les règles du concours d'attribution des allocations de thèse et le dossier à télécharger se trouvent sur le site de l'Ecole Doctorale SPI-MADIS (https://edspi.univ-lille.fr/presentation/specialites-spi-madis). L'étudiant choisit un sujet de thèse (la liste se trouvant sur les sites web des laboratoires), se met en contact avec un directeur de thèse et lui adresse un dossier complet (cf calendrier en ligne).

BOURSES

Des bourses d'excellence de Master 2, financées par le LABEX CEMPI (http://math.univ-lille1.fr/~cempi/), peuvent être attribuées aux candidats les plus méritants. La procédure de candidature est expliquée sur le site de la formation : https://sciences-technologies.univ-lille.fr/mathematiques/formation/master-mention-mathematiques/m2-recherche

Date limite de dépôt des demandes de bourse d'excellence : 18 février 2022

Vous pouvez également candidater aux bourses d'excellence proposées par le programme gradué GP-IKS. La procédure de candidature est précisée sur la page web du GP : http://www.isite-ulne.fr/index.php/fr/programme-gradue-information-and-knowledge-society-etudiant/

Il y a deux appels par an pour ces bourses, **en mars et en juin**.

ADMISSIONS

PHASE 1 : CANDIDATURE (PRÉ-REQUIS ET PUBLIC CONCERNÉ)

S'agissant des étudiants ayant validé le master 1 de la mention Mathématiques de l'Université de Lille, l'accès au master 2 Mathématiques parcours Recherche est de droit ; il vous appartiendra donc de procéder directement à votre inscription administrative (cf phase 2).

S'agissant des étudiants ayant validé un autre master 1 d'un parcours national de master dans une mention compatible (Mathématiques fondamentales ou appliquées) ou un diplôme à l'étranger (hors procédure Campusfrance), l'accès en master 2 Mathématiques parcours Recherche se fait par sélection sur dossier, suivi le cas échéant d'un entretien de motivation. **Toute candidature doit passer par la plateforme ecandidat :**

https://ecandidat.univ-lille.fr/

PHASE 2 : INSCRIPTION

Une fois que la décision d'acceptation dans la formation a été notifiée, l'**inscription administrative** se fait au début de l'année universitaire (le calendrier est en ligne sur le site de l'université de Lille : https://www.univ-lille.fr/etudes/candidater-sinscrire/) auprès des services administratifs de l'université.

Elle sera complétée, à la rentrée, par **l'inscription pédagogique** qui permet d'établir le contrat pédagogique de chaque étudiant et de l'inscrire aux examens correspondants (se rapprocher du secrétariat pédagogique).

ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT

SEMESTRE 3

BCC Maîtriser les concepts des mathématiques (Niveau approfondi 2) (Choix de 3 UE fondamentales parmi 7 dont au plus une UE de méthodes numériques)	Algèbre approfondie	9 ECTS
	Analyse approfondie	9 ECTS
	Géométrie approfondie	9 ECTS
	Introduction aux EDP non-linéaires	9 ECTS
	Probabilités approfondies	9 ECTS
	Méthodes numériques pour les EDP	9 ECTS
	Méthodes numériques pour les Probas-Stats	9 ECTS
BCC S'initier aux outils des mathématiques et à la médiation scientifique en milieu professionnel	Séminaire d'étudiants en anglais	3 ECTS

SEMESTRE 4

BCC S'initier à la recherche dans le domaine des mathématiques (Choix de 2 UE parmi 7)	Cours approfondi de mathématiques pures 1	9 ECTS
	Cours approfondi de mathématiques pures 2	9 ECTS
	Cours approfondi de mathématiques pures 3	9 ECTS
	Cours approfondi en analyse numérique et EDP 1	9 ECTS
	Cours approfondi en analyse numérique et EDP 2	9 ECTS
	Cours approfondi en probabilités et statistiques 1	9 ECTS
	Cours approfondi en probabilités et statistiques 2	9 ECTS
BCC S'initier aux outils des mathématiques et à la médiation scientifique en milieu professionnel	Mémoire de recherche (possibilité de faire un stage en plus du mémoire)	12 ECTS

PROGRAMME DES COURS

2022 - 2023

- **S3 : Algèbre approfondie – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

Le sujet principal de ce cours est l'algèbre commutative, c'est-à-dire la théorie des anneaux et ses applications. Les deux tiers du cours seront consacrés à l'étude des notions et structures fondamentales du domaine. Le tiers restant sera consacré à des thèmes d'approfondissement ou à des applications. Le plan ci-dessous fourni une liste de sujets d'approfondissement possibles. Ces approfondissements pourront être traités en cours ou faire l'objet d'exposés d'étudiants. Les choix seront faits en fonction des projets des étudiants. Il s'agira de faire la jonction avec les cours du second semestre ou d'apporter des compléments de connaissances.

- Notions fondamentales
  - Anneaux et idéaux
    – Définition de la structure et exemples (révisions et compléments), anneaux principaux et euclidiens, anneaux factoriels.
    – Anneaux noethériens. Le théorème de la base de Hilbert
    – Idéaux premiers et maximaux. Dimension de Krull d'un anneau
  - Modules sur les anneaux
    – Définition de la structure et exemples. Opérations sur les modules. Modules noethériens
    – Présentation des modules par générateurs et relations. Syzygies et résolutions
    – Classification des modules de type fini sur un anneau principal
  - Anneaux et modules de fractions, localisation
- Thèmes d'approfondissement
  - Bases de Gröbner et méthodes effectives dans les anneaux de polynômes. Algorithme de Buchberger. Applications au calcul des syzygies
  - Introduction à la géométrie algébrique. Nullstellensatz. Faisceaux et variétés algébriques. Etude des ´ courbes algébriques
  - Etude des anneaux d'entiers de corps de nombres. Structure d'anneau de Dedekind. Unités et groupes de classes d'idéaux dans les anneaux d'entiers de corps de nombres
  - Nombres p-adiques. Construction. Lemme de Hensel. Groupe des unités. Théorème d'Hasse-Minkowski et principe local-global.
  - . . .

Bibliographie

[1] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald. Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley publishing co., 1969.

[2] D. Eisenbud. Commutative algebra with a view toward algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, 2004.

[3] W. Fulton. Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry. W.A. Benjamin inc., 1969.

[4] D. Perrin. Géométrie algébrique. Une introduction. Savoirs Actuels. InterEditions, Paris. CNRS Editions, Paris, 1995.

[5] P. Samuel. Théorie algébrique des nombres, Hermann, Paris, 1967.

[6] J.-P. Serre. Cours d'arithmétique. Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

Evaluation
Le contrôle continu (CC) comportera un examen partiel de 2h et un exposé. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1, (Ex1+CC)/2).

- **S3 : Analyse approfondie – 36h de CM et 12h de TD**

Programme
- Partie I (24h CM - 8h TD)

L'enseignant choisira 6 thèmes cohérents parmi les 9 suivants :
- Convergence faible (et préfaible) dans le cadre des espaces de Banach, exemple des mesures complexes comme dual de C(K) (théorème de Riesz).
- Réflexivité, étude d'exemples classiques (espaces de suites, espaces Lp).
- Espaces de Fréchet, exemples de C∞(Ω), Hol(Ω), S(Rn), distributions, etc.
- Théorème de Paley-Wiener (Fourier complexe).
- Equations différentielles complexes et fonctions spéciales.
- Fonctions harmoniques.
- Espaces de Hilbert de fonctions analytiques sur un ouvert de C ou Cn, noyau reproduisant, exemples (Hardy, Bergman, Dirichlet).
- Opérateurs sur les espaces de Hilbert, opérateurs à noyau, compacts.
- Valeurs propres et singulières des opérateurs.
- Partie II (12h CM - 4h TD) La deuxième partie du programme sera établie en fonction des options offertes au second semestre.

Bibliographie
[1] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications, Masson.
[2] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer.
[3] J. Cerda, Linear Functional Analysis, gsm 116, AMS.
[4] F. Hirsch, G. Lacombe, Eléments d'analyse fonctionnelle, Dunod.
[5] W. Rudin, Functional Analysis, Mc Graw Hill.
[6] D. Li, Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés, Ellipses.

Evaluation
Le contrôle continu (CC) comportera trois devoirs à la maison. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1, (Ex1+CC)/2).

- **S3 : Géométrie approfondie – 36h de CM et 12h de TD**

Programme
- Partie I (24h CM - 8h TD)

L'enseignant choisira 6 thèmes cohérents parmi les 9 suivants :
- Sous-variétés de Rn.
- Variétés abstraites.
- Constructions de variétés (affines, projectives, actions de groupes).
- Formes différentielles sur les variétés. Différentiation. Lemme de Poincaré.
- Intégration des formes différentielles. Formule de Stokes.
- Lemme de Sard, degré.
- Fibrés vectoriels. Classification des fibrés sur S1 et S2.
- Cohomologie de de Rham.

- Indices des champs de vecteurs et nombre d'Euler. Formule de Hopf.
- Partie II (12h CM - 4h TD) La deuxième partie du programme sera établie en fonction des options offertes au second semestre.

Bibliographie

[1] Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, EDP Sciences 2010.
[2] Godbillon, Eléments de topologie algébrique, Hermann 1998.
[3] Chavel, Riemannian Geometry : a modern introduction, Cambridge University Press 2006.
[4] Bott-Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer 1982.
[5] Hirsch, Differential Topology, Springer, 1976.

Evaluation

Le contrôle continu (CC) sera un examen partiel de 2h. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S3 : Introduction aux EDP non-linéaires – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Espaces de Sobolev
  Inégalité de Poincaré. Théorèmes de trace et de recollement. Formule de Green. Injections de Sobolev. Théorème de Rellich.
- Etude théorique de problèmes elliptiques
  Théorème de Lax-Milgram, formulation variationnelle. Principe du maximum, régularité. Valeurs et vecteurs propres d'un opérateur elliptique. Méthode de sur et sous solutions.
- Problèmes paraboliques
  Existence et unicité. Principe du maximum, régularité. Méthode de sur et sous solutions.
- Théorèmes de point fixe Thormes de Banach, Brouwer et Schauder.
  Applications aux EDP non linéaires.
- Equations de transport Solutions classiques, solutions faibles.
  Méthode des caractéristiques, solutions entropiques. Résolution du problème de Riemann. Application à l'équation de Burgers et au trafic routier.

Bibliographie

[1] R. Adams, J. Fournier, Sobolev spaces (second edition), Elsevier.
[2] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, V. 19.
[3] M. E. Taylor, Partial Differential Equations I, II, III Applied Mathematical Sciences.
[4] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle : Théorie et Application, Dunod Université.
[5] D. Serre, Systèmes de lois de conservation, tomes i et ii, Cassini, 1996.
[6] D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer.

Evaluation

Le contrôle continu (CC) sera un examen partiel de 2h. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S3 : Probabilités approfondies – 36h de CM et 12h de TD**

Programme
- Processus stochastiques : théorème de Kolmogorov (admis), processus gaussiens, mouvement brownien, modification continue, propriétés des trajectoires.
- Introduction aux équations différentielles stochastiques : intégrale de Wiener, exemples simples d'EDS.
- Processus de Markov à sauts en temps continu : générateur, liens avec les chaînes de Markov, processus de Poisson, files d'attente.
- Inégalités de concentration : inégalités de Chernoff, Hoeffding, Bernstein, etc, applications.
- Grandes déviations : théorème de Cramer, principe de grandes déviations.

Bibliographie
[1] Bouleau, Processus Stochastiques et applications, Hermann.
[2] Claude Dellacherie, Pierre-Andre Meyer. Probabilités et potentiels. Hermann, 1975.
[3] D. Revuz et M. Yor, Continuous Martingales and Brownian motion, Springer.
[4] Karatzas et Shreeve, Brownian motion and stochastic calculus, Springer.
[5] I Florescu et C. Tudor, Handbook of Probability, Wiley.

Evaluation
Le contrôle continu (CC) sera un examen partiel de 2h. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S3 : Méthodes numériques pour les EDP - 20h de CM et 46h de TD**

Programme
Cette unité pédagogique est constituée de deux modules : Outils informatiques en en calcul scientifique et Finite elements methods.
- Partie I (36h TD) : Outils informatiques en calcul scientifique
- Prise en main de python : rappels et compléments.
- Résolution de systèmes linéaires : méthodes directes, méthodes itératives.
- Méthodes de calcul de valeurs propres-vecteurs propres.
- Résolution d'équations non linéaires.
- Résolution approchée de l'équation de la chaleur.
- Différences finies pour l'approximation d'une équation elliptique 1D.
- Différences finies pour la résolution approchée de l'équation de la chaleur.
- Partie II (20h CM – 10h TD) : Finite elements methods
- The aim of this course is to acquire the theoretical and practical backgrounds for the numerical approximation of (systems of) PDEs of elliptic, or parabolic types using Finite Element (FE) Methods. Content :
- Variational formulation of elliptic PDEs: strong/weak solutions; derivation of a variational formulation; well-posedness (coercive case; Lax-Milgram); equivalence with the strong form; treatment of different types of data (variable coefficients, homogeneous/non-homogeneous cases) and boundary conditions (pure Dirichlet, pure Neumann, mixed-type, Robin-type).
- Variational approximation of elliptic problems: general idea, vocabulary; well-posedness (matricial viewpoint); Céa's lemma (conforming case); general convergence theorem.

- P1/P2 FE in 1D : definition of a FE ; definition of the reduction, reconstruction, and interpolation operators; shape functions; stiffness and mass matrices computation; quadrature formulas (Newton-Cotes, Gauss-Legendre); imposition of boundary conditions; convergence theorems.
- P1/P2 /Q1 FE in 2/3D : notion of admissible mesh; barycentric coordinates; stiffness and mass matrices computation; assembly procedure; cubature formulas; convergence theorems
- Implementation of a 2D P1 FE method in C++ : use of Gmsh (mesher), and of various libraries (improved standard, linear algebra, visualization...); generic and object-oriented programming.
- Approximation of parabolic problems: diagonalization of the heat operator; Euler/FE time/space schemes (explicit and implicit versions); convergence theorems; CFL condition; mass lumping; implementation

Bibliographie
[1] G. Golub et C. Van loan : Matrix Computations, Johns Hopkins University Press
[2] G. Allaire et S.M. Kaber : Algèbre Linéaire Numérique. Cours et exercices, Paris Ellipses
[3] J.P. Demailly : Analyse Numérique et Equations Différentielles, EDP Sciences, Eyrolles
[4] P. Lascaux et R. Théodor : Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur, Dunod
[5] J.-B. Hiriart-Urruty : Optimisation et Analyse Convexe (résumé de cours, exercices et problèmes corrigés), editions EDP Sciences
[6] L. Di Menza : Analyse Numérique des Equations aux dérivées partielles, Cassini
[7] B. Lucquin : Equations aux dérivées partielles et leurs approximations, Ellipses
[8] E. Hubert et J. Hubbard : Calcul Scientifique, Vuibert
[9] J.-E. Rombaldi : Interpolation et Approximation (cours et Exercices Résolus), Vuibert
[1] A. Quarteroni, P. Gervasio, F. Saleri: Calcul Scientifique (cours et exercices corrigés), Springer
[10] W. Gautschi: Numerical Analysis, BirkhäuserT. Gordon : Mathématiques pour la modélisation et le calcul Scientifique, ISTE Editions
[11] G. Allaire : Numerical Analysis and Optimisation, Oxford University Press

Evaluation
Pour la partie I, le contrôle continu (CC) sera constitué d'évaluations de projets tout au long du semestre. L'examen final (Ex1) durera 3h et la note de l'EC sera (Ex1+CC)/2.
Pour la partie II, la note de CC comportera une note de TP, une note de DM et une note d'exposé d'articles. L'examen final (Ex1) durera 3h et la note de l'EC sera (Ex1+CC)/2.
La note de l'UE sera la moyenne des deux notes.

- **S3 : Méthodes numériques pour les Probas-Stats - 20h de CM et 56h de TD**

Programme
Cette unité pédagogique est constituée de deux modules : Outils informatiques en Proba-Stats et Théorie de l'apprentissage.

- Partie I (36h TD) : Outils informatiques en Proba-Stats
- Estimation paramétrique, intervalle de confiance.
- Méthodes de Monte-Carlo.
- Fonction de répartition empirique.
- Processus de Poisson.
- Chaînes de Markov.

- Partie II (20h CM – 20h TD) : Théorie de l'apprentissage
  L'objectif de ce cours est de savoir calculer des bornes sur les risques théoriques des méthodes d'apprentissage.
- Rappel sur les inégalités de concentration
- Risque théorique et empirique en apprentissage
- Nombres de croissance et dimension de Vapnik-Chervonenkis
- Complexité de Rademacher
- Nombres de couverture et dimension de pulvérisation

Bibliographie

[1] Processus de Markov et Applications. Algorithmes, réseaux, génome et finance. Etienne Pardoux.
[2] Exercice de probabilités : Licence - Master - Ecole d'ingénieurs. Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel et Thierry Meyre.
[3] Statistique mathématique en action. Vincent Rivoirard et Gilles Stoltz.

Evaluation
La partie I sera évaluée par un examen final de 3h. La partie II également. La note de l'UE est la moyenne des deux notes.

- **S3 : Séminaire d'étudiants en anglais – 24h de TD**

Programme
Le séminaire d'étudiants comprend des séances en Anglais basées sur la lecture de livres de mathématiques ou d'articles de recherche. Les étudiants sont amenés à faire des exposés en Anglais.
Evaluation
L'évaluation sera basée sur un exposé et un mémoire en anglais rendu pendant le semestre.

- **S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 1 : Formes automorphes - 32h de CM et 8h de TD**

Programme

<u>Introduction.</u> La théorie des nombres est au confluent de nombreux domaines mathématiques, dont elle se nourrit et qu'elle enrichit. Depuis les années 1970, la théorie des représentations automorphes en a apporté une compréhension nouvelle. Elle connaît un essor incroyable au sein du programme de Langlands, vaste programme de recherche construisant des ponts entre ces différents domaines. Des succès aussi impressionnants que la preuve du grand théorème de Fermat par Wiles, ou les résultats de Lindenstrauss et Venkatesh sur le chaos quantique, sont des fruits de ce cadre.
Les formes automorphes ont de multiples facettes : elles embrassent les courbes elliptiques, objets provenant de la géométrie algébrique ; les formes modulaires, fonctions génératrices de quantités arithmétiques ; les formes de Maass, solutions d'EDP sur des surfaces particulières ; ou encore les représentations galoisiennes, qui régissent les extensions de corps en théorie algébrique des nombres.
Leur accès demeure toutefois difficile et l'objectif de ce cours est de proposer une porte d'entrée dans ce monde vaste, riche et bouillonnant d'actualité.

Objectifs du cours. Nous introduirons le cadre dans lequel vivent ces formes automorphes (géométrie hyperbolique, groupes discontinus), présenterons certains de leurs avatars classiques (formes modulaires, formes de Maass), avant de progresser vers le cadre les unifiant : les représentations automorphes et le monde adélique. Ces représentations ont des propriétés analytiques, géométriques, algébriques et arithmétiques remarquables. Une fois ces objets introduits, nous avancerons dans deux directions proches des thématiques actuelles du monde de la recherche :

•Certaines informations d'une forme automorphe sont condensées dans une fonction «génératrice », appelée *fonction L*. Dans le cas le plus élémentaire, la fonction L associée à la forme automorphe triviale n'est autre que la fameuse fonction zêta de Riemann. Ces fonctions sont un outil puissant d'approche des formes automorphes, notamment à travers l'étude de leurs zéros, et nous en étudierons quelques propriétés.

•La théorie des formes automorphes permet également de découvrir des liens insoupçonnés entre différents domaines. Un cas élémentaire de ces liens est révélé par la formule de Poisson, qui peut être interprétée comme une formule reliant une distribution sur un réseau de l'espace euclidien à une distribution sur les fonctions propre du laplacien, construisant donc un pont entre géométrie et théorie spectrale. Nous introduirons la *formule des traces*, qui en est la généralisation au cadre non commutatif, à des espaces et des groupes plus généraux : elle relie invariants arithmétiques (les nombres de classes), théorie spectrale (les valeurs propres d'opérateurs différentiels), géométrie (les géodésiques fermées sur une surface).aux formes automorphes.

Prérequis. Si le cours tâchera d'être autocontenu, il est préférable d'avoir suivi les cours classiques d'algèbre et d'analyse.

Contenus
• géométrie hyperbolique, groupes discontinus
• formes modulaires classiques
• formes de Maass
• cadre adélique
• représentations automorphes
• fonctions L
• théorie spectrale
• formule des traces

Si le temps le permet, nous proposerons des ouvertures vers des applications actuelles des fonctions L (résultats de non-annulation, bornes de sous-convexité, etc.) et de la formule des traces (lois de Weyl, conjecture de Sato-Tate, ergodicité quantique, etc.).

Bibliographie

[1] Bergeron, N. *Le spectre des surfaces hyperboliques*. EDP Sciences, 2016.
[2] Bump, D. *Automorphic Forms and Representations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[3] Iwaniec, H. *Spectral Methods of Automorphic Forms*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Rhode Island, 2002.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement

- **S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 2 : Cohomologie des groupes - 32h de CM et 8h de TD**

Présentation

Chaque groupe *G* possède un anneau de cohomologie, qui peut se définir de manière topologique (comme anneau de cohomologie d'un espace topologique) ou purement algébrique (comme anneau d'extensions entre représentations du groupe). La cohomologie d'un groupe est un lieu d'interactions entre l'algèbre et la topologie, et joue un rôle dans de nombreux problèmes de géométrie, d'algèbre ou de topologie.
Ce cours est une introduction à la cohomologie des groupes. On y présentera les bases de la théorie, puis on démontrera le théorème de Evens - Quillen - Venkov qui établit que la cohomologie d'un groupe fini est un anneau de type fini. En cours de route, on croisera de nombreuses techniques standard d'algèbre homologique qui constituent un bagage utile plus généralement pour la géométrie, l'algèbre ou la topologie. Si le temps le permet, on finira le cours en décrivant des résultats récents et des conjectures ouvertes sur la cohomologie des groupes finis et de leur généralisation, les algèbres de Hopf de dimension finie.

Programme du cours :

- **Homologie et cohomologie des espaces topologiques**
  - Type d'homotopie
  - Homologie, suites exactes longues, exemples de calculs et d'applications
  - Anneaux de cohomologie
  - Construction de l'homologie et de la cohomologie
- **Ext et Tor**
  - Définition des Ext et Tor
  - Produits en Ext
  - Exemples et applications.
- **(Co)homologie des groupes**
  - Définition topologique via les espaces classifiants, exemples.
  - Définition algébrique via les Ext et Tor
  - Propriétés et exemples fondamentaux
- **Le théorème de Evens - Quillen - Venkov**
  - Suites spectrales, exemples.
  - Théorème de Evens Quillen Venkov pour la cohomologie des groupes finis.
- **Perspectives sur la cohomologie des algèbres de Hopf de dimension finie**

Bibliographie

[1] Benson, Representations and cohomology II, Cambridge University Press
[2] Brown, Cohomology of groups, GTM 87, Springer
[3] Hatcher, Algebraic topology, Cambridge University Press, https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html
[4] Weibel, An introduction to homological algebra, Cambridge University Press

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement

S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 3 : Groupes quantiques et invariants quantiques - 32h de CM et 8h de TD

Programme

Dans les années 1980 ont été définis de nouveaux invariants des nœuds et 3-variétés, appelés invariants quantiques. Le premier (et le plus simple) des invariants quantiques des nœuds fut défini par Jones (cela lui valut la médaille Fields en 1990). Rappelons qu'un nœud est une courbe fermée de l'espace $\mathbb{R}^3$ sans point d'intersection. En d'autres termes, un nœud peut être vu comme une ficelle éventuellement enchevêtrée dont les extrémités ont été recollées. Tout nœud peut être représenté par un diagramme planaire. Par exemple :

nœud trivial O nœud trèfle T nœud huit H

Jones a associé à tout nœud K un polynôme de Laurent $J_K(q)$. Par exemple,

$$J_O(q) = 1, \qquad J_T(q) = -q^{-4} + q^{-3} + q^{-1}, \qquad J_H(q) = q^2 + q^{-2} - q - q^{-1} + 1.$$

Le polynôme de Jones est un invariant du nœud *K*, c'est-à-dire qu'il ne change pas lorsque l'on déforme *K* continûment (i.e., via des déplacements, étirements ou rétrécissements de la ficelle). Les nœuds trivial, trèfle et huit sont donc bien différents (car leurs polynômes de Jones sont distincts).

Outre leurs applications en topologie, un des intérêts majeurs des invariants quantiques est qu'ils sont reliés à de nombreux domaines des mathématiques, notamment la théorie des représentations des groupes quantiques. Les groupes quantiques ont été introduits dans les années 1980 par Drinfeld (également médaille Fields en 1990) et Jimbo pour résoudre l'équation de Yang-Baxter, équation qui trouve son origine en mécanique statistique et est étroitement liée à la théorie des nœuds et des groupes de tresses.

Le but du cours est d'étudier le groupe quantique $U_q(\mathrm{sl}_2)$ et ses liens avec les invariants quantiques des nœuds et 3-variétés.

Plan du cours :

§1. Le polynôme de Jones

a. Nœuds et entrelacs
b. Construction élémentaire du polynôme de Jones
c. Exemples et propriétés

§2. Groupes quantiques

a. Algèbres de Hopf
b. Algèbres par générateurs et relations
c. Le groupe quantique $U_q(\mathrm{sl}_2)$

§3. Représentations

a. L'équation de Yang-Baxter
b. Catégories monoidales tressées
c. Représentations du groupe quantique $U_q(\mathrm{sl}_2)$

§4. Groupes quantiques et invariants quantiques

a. Le foncteur de Reshetikhin-Turaev
b. Le polynôme de Jones via $U_q(\mathrm{sl}_2)$
c. Invariants quantiques des 3-variétés

Bibliographie

[1] Kassel, C., *Quantum groups*, Graduate Texts in Math., 155. Springer-Verlag, New York, 1995.
[2] Kassel, C., Rosso, M., Turaev, V., *Quantum groups and knot invariants*, Panoramas et Synthèses vol. 5, Société Mathématique de France, Paris, 1997.
[3] Lickorish, R., *An Introduction to Knot Theory*, Graduate Texts in Math., 175. Springer-Verlag, New York, 1997.
[4] Turaev, V., *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, Second revised edition, de Gruyter Studies in Mathematics, 18. Walter de Gruyter, Berlin, 2010.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement.

- **S4 : Cours approfondi en analyse numérique et EDP 1 : Outils mathématiques pour l'information quantique- 32h de CM et 8h de TD**

Programme

Un ordinateur exploitant subtilement les principes de base de la mécanique quantique pourra être spectaculairement plus efficace qu'un ordinateur classique, comme l'ont démontré théoriquement Shor (1994) et Grover (1996), en proposant des algorithmes quantiques capables de factoriser un très grand nombre premier très rapidement ou de repérer très rapidement une donnée dans une très grande liste non-organisée. Ces résultats ont donné lieu à une nouvelle science, à la jonction de l'informatique, de la théorie de l'information et de la mécanique quantique : l'information quantique, qui englobe notamment la cryptographie quantique et le calcul quantique. Ses promesses, non totalement tenues pour l'instant, ont également attiré les investisseurs privés comme publics mondialement, vers la technologie quantique. Le but de ce cours est de fournir une introduction à quelques aspects de l'information quantique, en présentant notamment ses outils mathématiques. De ce point de vue, il s'agira d'un cours d'analyse, combinant analyse spectrale, analyse fonctionnelle, théorie des opérateurs et des algèbres d'opérateurs, ainsi que les probabilités. Le cours sera illustré avec des programmes en Qiskit, le "open source" de IBM qui permet de simuler des programmes quantiques. Les connaissances acquises en Licence et Master 1 dans ces disciplines suffiront comme prérequis et le cours s'inscrit aussi bien dans un parcours orienté vers les mathématiques pures que appliquées. Un polycopié sera mis à disposition.

Programme prévisionnel :

- ➢ Eléments de la mécanique quantique (8h CM+2h TD)
    - Espace des états = espace de Hilbert
    - Observables = opérateurs auto-adjoints
    - Observables (in-)compatibles = opérateurs (ne) commutant (pas)
    - Principe d'incertitude = transforée de Fourier
    - Etats = opérateurs à trace positifs
    - Mélange statistique, états pures et mixtes = combinaison convexe, points extrémaux Systèmes composites = produits tensoriels
    - Dynamique = flot unitaire = équation de Schrödinger
    - Symétries = représentation unitaire de groupe
    - Mesure physique = projection

➢ Intrication (8h CM+2h TD)
  - Etats séparables et intriqués
  - Le théorème “no cloning” (Zurek, Wootters, Dieks 1982)
  - La décomposition de Schmidt
  - La purification = la représentation GNS
  - Mesures d’intrication bi-partites, entropies de von Neumann

➢ Portes quantiques et algorithmes quantiques (10h CM + 2hTD)
  - Portes quantiques binaires, générales, universelles
  - Circuits quantiques
  - Cryptographie quantique : le protocole BB84
  - Algorithmes quantiques : Deutsch, Schor, Grover

➢ Opérations quantiques (6h CM+2hTD)
  - Application complètement positive sur un espace de Hilbert
  - Equation maîtresse quantique, générateur de Lindblad
  - Décohérence et approche à équilibre

Bibliographie

[1] [CTLD97] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Laloe, and Franck Diu. Mécanique Quantique I. Hermann, Paris, 1997.

[2] [GMS16] Ved Prakash Gupta, Prabha Mandayam, V.S. Sunder. The Functional Analysis of Quantum Information Theory. Springer, LNP, 2015, https://arxiv.org/pdf/1410.7188.pdf

[3] [Ha18] Masahito Hayashi. Quantum information theory : mathematical foundation Springer, 2017

[4] [NiCh00] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010.

[5] [RS75] Michael Reed and Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975

[6] [RS78] Michael Reed and Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.

[7] [RS80] Michael Reed and Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. I. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, second edition, 1980. Functional analysis.

[8] [S19] Wolfgang Scherer Mathematics of quantum computing. Springer, 2019

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement

- **S4 : Cours approfondi en analyse numérique et EDP 2 : Une introduction mathématique et numérique à la théorie cinétique - 32h de CM et 8h de TD**

Programme

La théorie cinétique vise à décrire des systèmes de particules en interaction comme des gaz, des plasmas ou même des anneaux planétaires, de manière statistique, en utilisant des équations aux dérivées partielles ou des équations intégro-différentielles. C'est l'un des piliers de la physique et des mathématiques modernes, et un domaine de recherche jeune et très actif. Le but principal de ce cours est d'introduire les motivations principales, les applications, les grandes méthodes, et certains problèmes ouverts en théorie cinétique. Nous nous focaliserons d'un côté sur les méthodes mathématiques et les outils nécessaires pour l'étude du problème de Cauchy et du comportement qualitatif d'équations cinétiques. D'un autre côté, nous introduirons les méthodes numériques pour la résolution de telles équations, à travers des implémentations pratiques en Python lors de TP.

- **Cours (32h)**.
  - Introduction (motivations, applications, modèles) ;
  - Équations de transport (méthode des caractéristiques, lemmes de moyennes, de dispersion) ;
  - Équations de type Vlasov (établissement de l'équation de champ moyen de Vlasov, introduction formelle aux modèles de Vlasov-Poisson et Vlasov-Maxwell pour les plasmas, stabilité des solutions faibles de Vlasov-Poisson) ;
  - Équations de type Boltzmann (caractère bien posé de l'équation de Boltzmann linéaire, forme faible et invariants de l'opérateur de Boltzmann, Théorème H, limites hydrodynamiques).
- **Lecture d'article**. Étude d'un sujet additionnel (conditions aux limites, hypocoercivité, amortissement Landau linéaire, schémas numériques préservant les comportements asymptotiques, limites de diffusion, schéma « particle-in-cell », etc.) via la lecture d'un article scientifique et d'une présentation orale.
- **Travaux pratiques (8h)**. Implémentation pratique de méthode numériques représentant l'état de l'art pour des modèles cinétiques classiques :
  - Méthode semi-lagrangienne pour l'équation de Vlasov ;
  - Méthode spectrale rapide pour l'équation de Boltzmann homogène

Bibliographie

[1] C. Villani, A Review of Mathematical Topics in Collisional Kinetic Theory, in Handbook of mathematical fluid dynamics, pp. 71–305, 2002.
[2] L. Saint-Raymond, Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation, Springer Science & Business Media, 2009.
[3] G. Dimarco, L. Pareschi, Numerical methods for kinetic equations, Acta Numerica, 23, 369-520, 2014.
[4] R. T. Glassey, The Cauchy problem in kinetic theory, SIAM, 1996.
[5] F. Bouchut, F. Golse, M. Pulvirenti. Kinetic equations and asymptotic theory, 2000.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement.

- **S4 : Cours approfondi en probabilités et statistiques 1 : Quelques modèles de physique statistique - 32h de CM et 8h de TD**

Présentation
La physique statistique a pour but de décrire le comportement et l'évolution *macroscopique*, c'est-à-dire à notre échelle, de systèmes physiques constitués d'un très grand nombre de particules, à partir de leur description *microscopique*. Qu'elle soit basée sur la mécanique classique ou la mécanique quantique, la description à l'échelle microscopique revêt le plus souvent un caractère aléatoire tandis que le comportement macroscopique global est le plus souvent déterministe, mais avec des fluctuations qui peuvent être encore aléatoires. L'objet de ce cours est de présenter quelques modèles de natures différentes et dont l'étude fait appel à des outils variés. Il sera découpé en deux parties principales.

Programme

1/ Introduction à l'étude des gaz sur réseaux

Le but de cette partie est d'offrir une introduction aux gaz sur réseau, ou les particules se déplacent stochastiquement sur une grille. Nous aborderons le formalisme mathématique pour comprendre de tels systèmes et leur limite d'échelle macroscopique. On se basera notamment sur un exemple classique, le SSEP, ou Processus d'Exclusion Simple Symétrique. Cet exemple posera les bases pour parler d'autres modèles classiques, comme les processus de zéro range, et pour comprendre l'impact de l'ajout de dynamiques de bord et/ou d'asymétrie dans le saut des particules.
Le SSEP est un exemple simple de *gaz sur réseau*. On peut le décrire informellement en dimension 1 de la manière suivante : on voit $\mathbb{Z}$ comme un réseau de dimension 1, chaque entier $x \in \mathbb{Z}$ est un *site du réseau*.
À un instant t donné (discret ou continu), chaque site x du réseau peut être soit occupé par une particule $\bullet$, soit être vide o. Décrivons par exemple le SSEP en temps discret, et supposons qu'à l'instant initial $t = 0$, il y ait un nombre fini de particules : à chaque instant $t > 0$, $t \in$ N, on choisit une particule au hasard, notons x le site sur lequel elle se trouve. La configuration à l'instant $t + 1$ est alors donnée par la configuration à l'instant t après la mise à jour suivante : la particule au site x a sauté sur le site $x - 1$ avec probabilité 1/2, ou sur le site $x+1$ avec probabilité 1/2. Si la particule essaie de sauter sur un site déjà occupé, on annule le saut (ou on inverse les deux particules, ce qui revient au même), auquel cas la configuration aux temps t et $t+1$ sont identiques. On définira proprement le SSEP en temps continu, et on étudiera certaines de ses propriétés microscopiques et macroscopiques.

On parlera en particulier du lien entre le SSEP et l'équation de la chaleur

$$\partial_t \rho(t,u) = \partial_u^2 \rho(t,u), \qquad (t,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

qui le caractérise au niveau macroscopique. On abordera ensuite les différences entre le SSEP et d'autres systèmes de particules classiques, notamment le processus dit de zéro-range, où plusieurs particules peuvent cohabiter sur le même site.
On pourra se référer à [1, 2].

2/ Introduction aux processus ponctuels déterminantaux

Initialement considérés pour modéliser des fermions en mécanique quantique, les *processus ponctuels déterminantaux* ont été fortement popularisés ces vingt dernières années en raison de leur apparition assez surprenante dans divers champs des mathématiques et de la physique. Pour citer quelques exemples [4, 5] : Valeurs propres de matrices aléatoires, diffusions conditionnées à ne pas s'intersecter, zéros de fonctions analytiques aléatoires,

pavages aléatoires, plus grande sous-suite croissante d'une permutation aléatoire et problème d'Ulam, représentations irréductibles du groupe symétrique sous la mesure de Plancherel, arbres couvrants uniformes d'un graphe.
Plus impressionnant encore, les mêmes processus ponctuels déterminantaux (*noyau sinus*, *noyau de Airy/loi de Tracy-Widom*, pour citer les plus connus), apparaissent systématiquement comme objets limites dans l'étude locale de nombreux systèmes de particules aléatoires : ce sont les fameux *phénomènes d'universalité* en matrices aléatoires, qui en fait dépassent largement le cadre des seuls modèles matriciels [3].
Le but de cette partie est d'offrir à l'étudiant à une introduction aux processus ponctuels déterminantaux en abordant à la fois des généralités théoriques et l'étude d'exemples concrets.

Bibliographie

[1] Kipnis C. and Landim C. (1999) : *Scaling limits of interacting particle systems.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **320**, Springer, New York.
[2] Liggett T. M. (1985) : *Interacting particle systems*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **276**, Springer, New York.
[3] P. Deift, *Universality for mathematical and physical systems*, International Congress of Mathematicians. Vol. I, 125–152, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
[4] J. B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres and B. Virág, *Determinantal processes and independence*, Probab. Surv. 3 (2006), 206–229.
[5] K. Johansson, *Random matrices and determinantal processes*, Mathematical statistical physics, 1–55, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement.

- **S4 : Cours approfondi en probabilités et statistiques 2 : Fonctions spéciales et probabilités - 32h de CM et 8h de TD**

Programme

Les fonctions dites spéciales sont un ensemble de fonctions de la variable complexe apparaissant dans diverses équations différentielles classiques de la physique. Leurs origines remontent aux fondements de l'analyse (Leibniz, Euler, Gauss). Au cours des siècles, elles sont apparues dans de nombreux types de problèmes dont elles donnent des solutions exactes. Dans ce cours, on mettra l'accent sur la série hypergéométrique :

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a\ b \\ c \end{matrix}; z\right] = \sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} z^n $$

où (t)n = t(t + 1)...(t + n − 1) désigne la factorielle ascendante, qui est une des fonctions spéciales les plus importantes. On montrera par des techniques classiques d'analyse réelle et complexe [9] un certain nombre de résultats emblématiques sur cette série (représentations intégrales, équation différentielle, asymptotiques, zéros, transformation sur les paramètres) répertoriés dans [4]. On évoquera aussi quelques extensions `a plusieurs variables [1]. Dans un second temps, on mentionnera un certain nombre de domaines des probabilités où les fonctions spéciales jouent un rôle important. Ceci nous permettra d'aborder quelques problèmes toujours ouverts. Inégalités de concentration : comment les obtenir ? Les approches et résultats ([3, 4, 5, 6. Les thèmes abordés seront en partie les suivants :

- Convolutions Gamma généralisées, moyennes de Dirichlet [6, 8]

- Temps de passage et temps d'atteinte de processus de Markov. Rappels de la théorie classique de Feller [5] et étude de cas avec sauts [7].
- Fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien [2]. Liens avec la physique des systèmes désordonnés [3].

Bibliographie

[1] P. Appell et J. Kampé de Fériet. Fonctions hypergéometriques et hypersphériques. Gauthier-Villars, Paris, 1926.
[2] F. Baudoin et N. O'Connell. Exponential functionals of Brownian motion and class-one Whittaker functions. Ann. Inst. H. Poincar´e Probab. Statist. 47 (4), 1096-1120, 2011.
[3] A. Comtet et Y. Tourigny. Explicit formulæ in probability and statistical physics. Dans : In Memoriam Marc Yor - Séminaire de Probabiliés XLVII, Springer-Verlag, 2015.
[4] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger et F. G. Tricomi. Higher transcendental functions. McGraw-Hill, New-York, 1953
[5] W. Feller. Diffusion processes in one dimension. Trans. Amer. Math. Soc. 77, 1-31, 1954.
[6] L. F. James, B. Roynette et M. Yor. Generalized gamma convolutions, Dirichlet means, Thorin measures, with explicit examples. Probab. Surv. 5, 346-415, 2008.
[7] A. Kuznetsov. On extrema of stable processes. Ann. Probab. 39 (3), 1027-1060, 2011.
[8] G. Letac et M. Piccioni. Dirichlet curves, convex order and Cauchy distribution. Bernoulli 24(1),
1-29, 2018.
[9] W. Rudin. Real and complex analysis. McGraw-Hill, New-York, 1966.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement.